

**Sveučilište u Zagrebu Geodetski fakultet  
Zavod za Geomatiku  
Primijenjena fizikalna geodezija**

**Željko Hećimović**

**1. ZADATAK**

**Računanje potencijala i tenzora ubrzanja sile teže**

**Zagreb, 2005.**

# 1. Uvod

Kugla i nivo-elipsoid su fizikalno-matematički modeli koji se koriste kao aproksimacija Zemlje. Homogena kugla je jednostavno tijelo ispunjeno homogenom masom i sferom kao rubnom plohom. Nivo-elipsoid ima rotacijski elipsoid kao rubnu plohu. Za zadavanje nivo-elipsoda su dovoljna četiri parametra (Moritz 1984, Hećimović 2002). Dva koja definiraju rubnu plohu (velika poluos elipsoida  $a$  i spljoštenost elipsoida  $f$ ) i dva koja definiraju fizikalne karakteristike nivo-elipsoida (geocentrična gravitacijska konstanta  $GM$  i kutna brzina rotacije  $\omega$ ). Za zadani nivo-elipsoid je definirano vanjsko normalno polje ubrzanja sile teže.

Za elipsoid Bessel 1841, koji je u službenoj upotrebi u Hrvatskoj, nisu definirani fizikalni parametri ( $GM$ ,  $\omega$ ) te on nije nivo-elipsoid (fizikalno tijelo) već samo rotacijski elipsoid (matematička ploha). Zbog toga će u ovom računskom zadatku biti korišteni parametri nivo-elipsoida Geodetic Reference System 1980 (GRS80) koji je u širokoj upotrebi. U tablici 1 se nalaze parametri nivo-elipsoida GRS80.

Tablica 1. *Parametri nivo-elipsoida GRS80*

	<b>GRS80</b>
<b>a</b> [m]	6378137,0
<b>GM</b> [ $\text{m}^3/\text{s}^2$ ]	0,3986005E+15
<b><math>\omega</math></b> [rad/s]	0,7292115E-04
<b>f</b>	0,0033528106812
<b>1/f</b>	298,25722210
<b>b</b> [m]	6356752,3141
<b><math>e^2</math></b>	0,006694380023
<b><math>e'^2</math></b>	0,006739496775
<b><math>e'</math></b>	0,082094438152
<b><math>\gamma_e</math></b> [ $\text{m}/\text{s}^2$ ]	9,7803267715
<b><math>\gamma_p</math></b> [ $\text{m}/\text{s}^2$ ]	9,8321863685
<b><math>f^*</math></b>	0,005302440112
<b>E</b> [m]	521854,0097

Ciljevi zadatka su:

- ovladavanjem praktičnim računanjem potencijala privlačenja za homogenu kuglu s obzirom na razne visine iznad kugle do visine putanja CHAMP, GRACE i GOCE satelita,
- ovladavanje praktičnim računanjem potencijala privlačenja nivo-elipsoida,
- ovladavanje praktičnim računanjem centrifugalnog potencijala,
- ovladavanje praktičnim računanjem normalnog potencijala ubrzanja sile teže,
- dobivanje uvida u odnos između potencijala ubrzanja sile teže, centrifugalnog potencijala i potencijala privlačenja,
- dobivanje uvida o promjenama normalnog potencijala privlačenja, centrifugalnog potencijala i potencijala ubrzanja sile teže na teritoriju Hrvatske,
- ovladati računanjem komponenti tenzora normalnog polja ubrzanja sile teže,
- ovladati službenim i tradicionalnim jedinicama elemenata polja ubrzanja sile teže.

## 2. Potencijal privlačenja

Zemlja je sastavljena od masa koje definiraju gravitacijsko potencijalno polje privlačenja. Jakost potencijalnog gravitacijskog polja i potencijalna energija ovise o položaju materije u polju. Prema Newtonovom zakonu potencijal je proporcionalan masi tijela i obrnuto proporcionalan udaljenosti od mase koja stvara potencijal privlačenja. Zbog nepravilnog rasporeda masa (topografija) i varijabilnosti gustoća masa javlja se anomalnost realnog polja. U ovom prvom zadatku će se računati potencijal idealiziranih tijela homogene kugle i nivo-elipsoida za razliku od kasnijih zadataka u kojima će se koristiti realno polje ubrzanja sile teže.

### 2.1 Potencijal privlačenja homogene kugle

Realnu Zemlju možemo u prvom približenju aproksimirati kuglom homogenih masa. Ona definira pravilno gravitacijsko polje. Svi pravci vektora privlačenja koji se dobiju pomicanjem materije u gravitacijskom polju kugle prolaze kroz centar kugle. Takovo polje naziva se centralno polje. Potencijal privlačenja na i u vanjskom području homogene kugle dobije se s pomoću izraza

$$V = G \frac{m}{r} = \frac{4}{3} G \pi \rho \frac{R^3}{r} \quad (1)$$

gdje je

- $m$  masa tijela (homogena kugla); prilikom numeričkog računanja u ovom zadatku će se koristiti za masu homogene kugle masa Zemlje;  $m = 5,976 \cdot 10^{24}$  kg,
- $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>; gravitacijska konstanta (Napomena: za razliku od gravitacijske konstante, geocentrična gravitacijska konstanta je umnožak gravitacijske konstante i mase tijela, tj.  $GM = G \cdot M$ , gdje je  $M \equiv m$  masa tijela u koju je za realnu Zemlju uključena i masa atmosfere),
- $r$  radijalna udaljenost promatrane točke od središta kugle,
- $R = 6\,371\,000$  m; polumjer zakrivljenosti kugle,
- $\rho = 5516,951$  kg m<sup>-3</sup> srednja gustoća masa Zemlje (2670 kg m<sup>-3</sup> srednja gustoća površinskih masa Zemlje),
- $\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\dots$

Da bi se u gornjem izrazu dobio rezultat u službenim jedinicama za gravitacijski potencijal [m<sup>2</sup> s<sup>-2</sup>] masa  $m$  će se uvesti u jedinicama [kg], radij vektor  $r$  u [m], gustoća masa  $\rho$  u [kg m<sup>-3</sup>] i polumjer zakrivljenosti kugle  $R$  u [m]. Izraz (1) vrijedi za površinu i vanjski prostor homogene kugle, tj.  $r \geq R$ . Unutar kugle ( $r < R$ ) se potencijal ponaša po drugačijem zakonu te se za računanje potencijala unutar kugle ne koristi izraz (1).

### 2.2 Potencijal privlačenja nivo-elipsoida

Potencijal privlačenja nivo-elipsoida u točki  $P$  računa se pomoću izraza koji je rastavljen na potencijal centralnog polja homogene kugle  $V_P^C$  i potencijal zbog spljoštenosti polja  $T_P$ , tj. izraz ima oblik

$$U_p = V_p^C + T_p. \quad (2)$$

Potencijale u ovom izrazu dobivamo pomoću

$$V_p^C = \frac{GM}{r}, \quad (3)$$

$$T_p = \frac{C}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{C}{r^5} (2Z^2 - X^2 - Y^2) \quad (4)$$

gdje je  $C = -8,7776 \cdot 10^{24}$  konstanta koja definira mjeru spljoštenosti nivo elipsoida,  $r$  geocentrična udaljenost koja je povezana s kartezijevim koordinatama pomoću izraza

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$\theta$  sferna polarna udaljenost je kut iz centra nivo-elipsoida između pravca osi rotacije i smjera na promatranu točku, tj.  $\theta = 90^\circ - \varphi$  gdje je  $\varphi$  elipsoidna širina točke, a  $X, Y, Z$  kartezijeve koordinate točke. Veza pravokutnih kartezijevih koordinata  $X, Y, Z$  i geodetskih, elipsoidnih koordinata  $\varphi, \lambda$  i  $h$  definiran je pomoću izraza

$$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda, \quad (5a)$$

$$Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda, \quad (5b)$$

$$Z = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi, \quad (5c)$$

gdje je  $h$  elipsoidna visina točke. Za nivo-elipsoid je  $h = 0,000$  m. U gornjim izrazima je  $N$  polumjer zakrivljenosti prvog vertikala koji se dobije pomoću izraza

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (6)$$

a  $e^2$  kvadrat prvog ekscentriciteta elipsoida koji se dobije pomoću izraza

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (7)$$

### 3. Računanje centrifugalnog potencijala

Centrifugalni potencijal se javlja zbog rotacije Zemlje. Centrifugalni potencijal je funkcija najkraće udaljenost promatrane točke od osi rotacije Zemlje, tj. okomice na os rotacije iz promatrane točke. Računa se pomoću izraza (Torge 2001, Bašić 2001/2002)

$$Z_p = \frac{\omega^2}{2} d^2 = \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (8)$$

gdje je  $d$  najkraća udaljenost od osi rotacije Zemlje do promatrane točke. Veza s kartezijevim koordinatama je definirana izrazima

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (9)$$

i

$$\cos \theta = Z/r, \quad (10a)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{r}. \quad (10b)$$

## 4. Potencijal ubrzanja sile teže

Potencijal ubrzanja sile teže je prouzrokovan gravitacijskim potencijalom privlačenja (masom) i centrifugalnim potencijalom (rotacijom Zemlje).

### 4.1 Potencijal ubrzanja sile teže prema IAG izrazu

Službeni izraz za normalni potencijal ubrzanja sile teže nivo-elipsoida dan od International Association of Geodesy (IAG) (Moritz 1984) dobiva se s pomoću izraza

$$U_0 = \frac{GM}{E} \arctan e' + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \quad (11)$$

gdje je

- $\omega$  kutna brzina rotacije Zemlje,
- $a$  velika poluos elipsoida,
- $GM$  geocentrična gravitacijska konstanta,
- $E$  linearni ekscentricitet elipsoida kojeg računamo s pomoću izraza

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (12)$$

-  $e'^2$  kvadrat drugog ekscentriciteta elipsoida računamo pomoću izraza

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \quad (13)$$

Potencijal privlačenja za nivo-elipsoid je konstantan ali se centrifugalni potencijal mijenja s promjenom širine jer se mijenja najkraća udaljenost od točke na površini nivo-elipsoida do osi rotacije. U izrazu koji se koristi pri IAGu drugi član se odnosi na centrifugalni potencijal koji je izražen kao konstantna vrijednost, a ne kao funkcija širine. Njime se dobiva osrednjena

vrijednost centrifugalnog potencijala za nivo-elipsoid. Razlog ovakvom pristupu je da bi se dobila jedna reprezentativna vrijednost potencijala ubrzanja sile teže za cijeli nivo-elipsoid.

## 4.2 Potencijal ubrzanja sile teže za nivo-elipsoid

Potencijal ubrzanja sile teže za promatranu točku P u normalnom polju ubrzanja sile teže  $U_P^W$  se dobije zbrajanjem potencijala privlačenja  $U_P$  i centrifugalnog potencijala  $Z_P$  pomoću izraza

$$U_P^W = U_P + Z_P. \quad (14)$$

Da bi bolje uočili razliku između realnog i normalnog potencijala ubrzanja sile teže usporediti ćemo ovaj izraz s izrazom za realni potencijal ubrzanja sile teže

$$W_P = V_P + Z_P, \quad (15)$$

gdje je  $V_P$  potencijal privlačenja u točki P i  $W_P$  realni potencijal ubrzanja sile teže u točki P. Razlika između realnog  $W_P$  i normalnog potencijala  $U_P^W$  ubrzanja sile teže je u realnom  $V_P$  i normalnom  $U_P$  potencijalu privlačenja. Oni se razlikuju zbog anomalnosti realnog u odnosu na normalno polja.

NAPOMENA: Zbog velikih konstanti prilikom računanja potencijala treba voditi računa o signifikantnim decimalama jer potencijal treba izraziti na četvrtu decimalu.

## 5. Računanje elemente tenzora normalnog polja ubrzanja sile teže

Druge derivacije potencijala definiraju elemente tenzora gradijenata ubrzanja sile teže. One definiraju lokalne promjene polja. Tensor gradijenata ubrzanja sile teže ima oblik

$$\text{grad } \gamma = \text{grad}(\text{grad } U) = \begin{pmatrix} U_{XX} & U_{XY} & U_{XZ} \\ U_{YX} & U_{YY} & U_{YZ} \\ U_{ZX} & U_{ZY} & U_{ZZ} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Koordinatni sustav X, Y, Z je definiran kao lokalni sustav u promatranoj točki. Komponente tenzora dobivaju se s pomoću izraza:

$$U_{ZX} = U_{XZ} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial x} = \frac{\gamma_e \cdot f^*}{M} \sin 2\varphi, \quad (17)$$

$$U_{ZY} = U_{YZ} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

Elementi tenzora koji se odnose na promjenu u horizontalnoj ravnini dobivaju se pomoću izraza

$$U_{XX} = -\frac{\gamma_0}{M}, \quad (19)$$

$$U_{YY} = -\frac{\gamma_0}{N}, \quad (20)$$

$$U_{XY} = U_{YX} = 0. \quad (21)$$

Oni definiraju zakrivljenost i torziju polja. Vertikalnu komponentu gradijenta ubrzanja sile teže dobijemo pomoću izraza

$$U_{ZZ} = \gamma_0 \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) + 2\omega^2. \quad (22)$$

U gornjim izrazima je

- $\varphi$  geodetska, elipsoidna širina,
- $\omega$  kutna brzina rotacije Zemlje,
- $\gamma_0$  normalna vrijednost ubrzanja sile teže na plohi nivo-elipsoida, računana formulom Somigliana (Torge 2001, Bašić 2001/2002)

$$\gamma_0 = \frac{a \gamma_e \cos^2 \varphi + b \gamma_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (23)$$

gdje je

- $\gamma_e$  normalna vrijednost ubrzanja sile teže na ekvatoru na plohi nivo-elipsoida,
- $\gamma_p$  normalna vrijednost ubrzanja sile teže na polu na plohi nivo-elipsoida,
- $a$  velika poluos nivo-elipsoida,
- $b$  mala poluos nivo-elipsoida,
- $f^*$  globalna normalna spljoštenost ubrzanja sile teže (Moritz 1984, Hećimović 2002) koju dobijemo s pomoću izraza

$$f^* = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}, \quad (24)$$

- $M$  polumjer zakrivljenosti meridijana

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad (25)$$

gdje je  $N$  polumjer zakrivljenosti prvog vertikala koji dobijemo pomoću izraza

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}. \quad (26)$$

Prvi ekscentricitet elipsoida, iz ovog izraza, dobije se pomoću izraza

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (27)$$

## 6. Službene i tradicionalne jedinice potencijala ubrzanja sile teže i njegovih derivacija

Jedinice u kojima se izražava potencijal i njegove derivacije su službeno definirane u sustavu jedinica Systeme International d'Unites (SI). Međutim, još uvijek se potencijal i njegove derivacije mogu naći izražene u tradicionalnim jedinicama. Veza službenih SI i tradicionalnih jedinica dana je u tablici 2.

Tablica 2. *Veza službenih SI i tradicionalnih jedinica*

	SI sustav	Tradicionalne jedinice
Potencijal ubrzanja sile teže	$10 \text{ m}^2/\text{s}^{-2}$	1 kGal m
Prva derivacija potencijala (Ubrzanje sile teže)	$10^{-2} \text{ m s}^{-2}$	1 Gal
Prva derivacija potencijala (Ubrzanje sile teže)	$10^{-5} \text{ m s}^{-2}$	1 mGal
Prva derivacija potencijala (Ubrzanje sile teže)	$10^{-8} \text{ m s}^{-2}$	1 $\mu$ Gal
Druga derivacija potencijala (Gradijent ubrzanja sile teže)	$10^{-9} \text{ s}^{-2}$	1 E ili 0,1 mGal/km

Objašnjenje tradicionalnih jedinica iz tablice:

- [Gal] je jedinica ubrzanja sile teže prema starom Centimetre-Gram-Second (CGS) sustavu. Dobila je ime po talijanskom fizičaru, astronomu i matematičaru Galilei Galileiu,
- [kGal m] je kilogal metar,
- [E] je Eötvös. Dobila je ime po mađarskom fizičaru Rolandu von Eötvösu koji je konstruirao instrument za mjerenje komponenti gradijenata ubrzanja sile teže (variometar).

## Literatura

- Bašić, T. (2001/2002): Skripta iz predmeta Fizikalna geodezija. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu. Zagreb.
- Hećimović, Ž. (2002): Računanje parametara nivo-elipsoida. Geodetski list, God. 56 (79) , br. 2, str. 97 - 102, Zagreb, lipanj 2002.
- Moritz, H. (1984): Geodetic Reference System 1980. U: C. C. Tscherning (ed.): The geodesist's handbook 1984, Bull. Geod, 58, 388-398, 1984.
- Torge, W. (2001): Geodesy (3. izdanje). Walter de Gruyter. Berlin, New York 2001.