

**Sveučilište u Zagrebu Geodetski fakultet
Zavod za Geomatiku
Primijenjena fizikalna geodezija**

Željko Hećimović

2. ZADATAK

**Računanje elemenata polja ubrzanja sile teže
primjenom globalnog geopotencijalnog modela**

Zagreb, 2005.

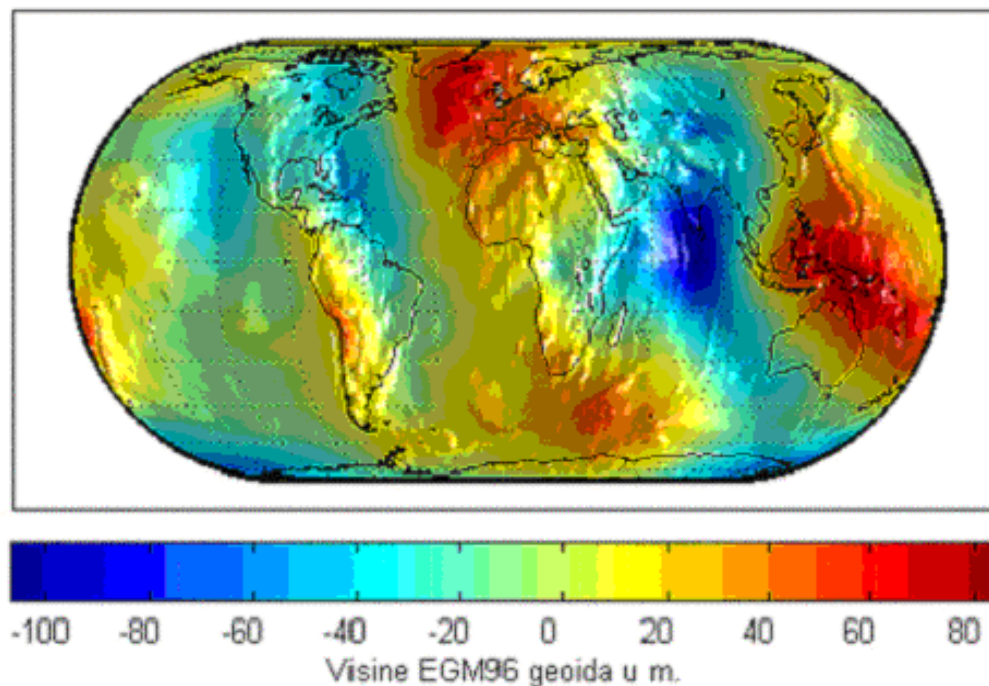
1. Uvod

Globalni geopotencijalni modeli (Global Geopotential Model, GPM) dobiju se rješenjem problema graničnih vrijednosti gravitacijskog potencijala za sferu. Matematički operat rješenja problema ima oblik razvoja sfernih funkcija u redove.

Globalni geopotencijalni modeli omogućuju računanje elemenata polja ubrzanja sile teže za svaku točku na i u vanjskom području Zemlje. Iako ga je moguće primijeniti za svaku točku na Zemlji, kvaliteta GPMA je ograničavajući faktor da bi se mogao koristiti za sve potrebe. GPM predstavlja dugovalni, uglačani model polja ubrzanja sile teže koji ne sadrži lokalne, detaljne karakteristike polja. Globalni geopotencijalni modeli EGM96 i GFZ97 najbolje opisuju polja ubrzanja sile teže na teritoriju Hrvatske. Pouzdanost EGM96 modela na teritoriju Hrvatske s obzirom na undulacije je oko 0,5 m (Hećimović 2000, Hećimović i Bašić 2003). Mnogobrojne analize kvalitete EGM96 modela u zemljama širom svijeta su pokazale da je njegova kvaliteta od 0,2 do 0,9 m na kontinentalnim područjima (IGS 1996). Da bi se dobio kvalitetniji model polja ubrzanja sile teže, koji vjernije opisuje polje ubrzanje sile teže, modeliraju se regionalni i lokalni modeli polja ubrzanja sile teže. Na osnovu GPMA mogu se izračunati elementi polja ubrzanja sile od kojih su najvažniji:

- poremećajni potencijal,
- undulacije geoida,
- anomalije ubrzanja sile teže,
- poremećaj ubrzanja sile teže,
- komponente otklona vertikalna.

Na slici 1 je prikazan EGM96 geoid.



Slika 1. EGM96 geoid.

Tri satelitske misije

- Challenging Miniasatellite Payload (CHAMP),
- Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE),
- Gravity Field and Stady-State Ocean Circulation Explorer (GOCE),

definiraju nove standarde modeliranja globalnih geopotencijalnih modela. Očekuje se dobivanje centimetarskog globalnog geoida sa prostornom razlučivošću od 100 km. U tablici 1 su dani osnovni podaci o satelitskim misijama.

Tablica 1. *Osnovni podaci o satelitskim misijama*

Misija	Lansiranje	Trajanje misije	Početna visina leta	Inklinacija putanje	Glavni instrumenti	Ciljevi istraživanja
CHAMP	15.7.2000.	5 godina	454 km	87,2°	GPS, akcelerometar, magnetometri	gravitacija, magnetometrija, atmosfera
GRACE	17.3.2002.	5 godina	485 km	89°	GPS, akcelerometar	gravitacija
GOCE	2006.	2 godine	250 km	96,5°	GPS, 3-osni gradiometar	gravitacija

Ciljevi zadatka su:

- upoznavanje sa praktičnim zadavanjem globalnih geopotencijalnih modela,
- upoznavanje s matematičkim izrazima za računanje elemenata polja ubrzanja sile teže primjenom globalnog geopotencijalnog modela,
- ovladavanje praktičnim računanjem undulacija geoida, anomalija ubrzanja sile teže, poremećaja ubrzanja sile teže i komponenti otklona vertikalna primjenom globalnog geopotencijalnog modela za pojedinačne točke i za pravilno polje točaka,
- dobivanje i interpretacija elemenata globalnog polja ubrzanja sile teže na teritoriju Hrvatske.

2. Zadavanje globalnog geopotencijalnog modela

Globalni geopotencijalni modeli zadaju se s pomoću koeficijenata sfernih funkcija C i S . Razvoj sfernih funkcija u red provodi se do maksimalnog stupnja l i maksimalnog reda m . Do kojeg maksimalnog stupnja i reda će se razvijati GPM ovisi o kvaliteti i distribuciji raspoloživih podataka prilikom modeliranja. Uz harmonijske koeficijente C i S za neke modele su dane i pripadajuće standardne devijacije koeficijenata σ_C i σ_S . Najpoznatiji globalni geopotencijalni modeli s osnovnim podacima dani su u tablici 2.

Tablica 2. Osnovni podaci o najpoznatiji globalnim geopotencijalnim modelima

Br.	Model	Stupanj i red modela	Model je zadan s pomoću
1	EGM96	360 x 360	$l, m, C, S, \sigma_C, \sigma_S$
2	GFZ97	359 x 359	$l, m, C, S, \sigma_C, \sigma_S$
3	OSU91A	360 x 360	l, m, C, S
4	IFE88E2	360 x 360	l, m, C, S
5	GFZ93A	360 x 360	$l, m, C, S, \sigma_C, \sigma_S$
6	GFZ93B	360 x 360	$l, m, C, S, \sigma_C, \sigma_S$
7	GPM2	200 x 200	l, m, C, S
8	GRIM4	72 x 72	$l, m, C, S, \sigma_C, \sigma_S$
9	GEM-T3	50 x 50	l, m, C, S
10	JGM-1S	60 x 60	l, m, C, S
11	JGM-2	70 x 70	l, m, C, S
12	JGM-2G	70 x 70	l, m, C, S
13	JGM-2S	70 x 70	l, m, C, S
14	JGM-3	70 x 70	$l, m, C, S, \sigma_C, \sigma_S$

Na vježbama će se prilikom praktičnog računanja koristiti globalni geopotencijalni model Earth Gravitational Model 1996 (EGM96). EGM96 je jedan od najkvalitetnijih globalnih geopotencijalnih modela.

Earth Gravitational Model 1996 (EGM96) nastao je u suradnji NASA Goddard Space Flight Center (GSFC), National Imagery and Mapping Agency (NIMA) i The Ohio State University (OSU). Pri njegovu računanju korištene su terestričke površinske anomalije ubrzanja sile teže, altimetrijski dobivene anomalije ubrzanja sile teže iz ERS-1 i GEOSAT misija, podaci laserskih satelitskih mjerenja, GPS-mjerenja, podaci NASA Tracking and Data Relay Satellite System (TDRSS), DORIS sustava i US Navy TRANET Doppler sustava te mjerenja s TOPEX/POSEIDON, ERS-1 i GEOSAT misija satelitske altimetrije. Posebni globalni referentni sustav, vrlo blizak datumima WGS84 odnosno GRS80 korišten je kao referentni okvir za računanje modela koji se sastoji od harmonijskih koeficijenata do reda i stupnja 360.

Zadan je pomoću harmonijskih koeficijenata C i S , čiji je maksimalni stupanj $l = 360$ i maksimalan red $m = 360$. Uz harmonijske koeficijente C i S dane su i pripadajuće standardne devijacije koeficijenata σ_C i σ_S . Izgled datoteke s početnim i završnim koeficijentima modela EGM96 je prikazan u tablici 3.

Tablica 3. Početni i završni koeficijenti modela EGM96

l	m	C	S	σC	σS
2	0	-0.484165371736E-03	0.000000000000E+00	0.35610635E-10	0.00000000E+00
2	1	-0.186987635955E-09	0.119528012031E-08	0.10000000E-29	0.10000000E-29
2	2	0.243914352398E-05	-0.140016683654E-05	0.53739154E-10	0.54353269E-10
3	0	0.957254173792E-06	0.000000000000E+00	0.18094237E-10	0.00000000E+00
3	1	0.202998882184E-05	0.248513158716E-06	0.13965165E-09	0.13645882E-09
3	2	0.904627768605E-06	-0.619025944205E-06	0.10962329E-09	0.11182866E-09
3	3	0.721072657057E-06	0.141435626958E-05	0.95156281E-10	0.93285090E-10
4	0	0.539873863789E-06	0.000000000000E+00	0.10423678E-09	0.00000000E+00
....					
360	355	-0.201770330207E-10	0.549510347417E-11	0.50033977E-10	0.50033977E-10
360	356	0.437069296408E-10	-0.104331448796E-09	0.50033977E-10	0.50033977E-10
360	357	-0.628042366728E-11	0.106635915741E-09	0.50033977E-10	0.50033977E-10
360	358	0.709604781531E-10	0.691761006753E-10	0.50033977E-10	0.50033977E-10
360	359	0.183971631467E-10	-0.310123632209E-10	0.50033977E-10	0.50033977E-10
360	360	-0.447516389678E-24	-0.830224945525E-10	0.50033977E-10	0.50033977E-10

Koeficijenti niži od stupnja $l = 2$ jednaki su nuli i nisu zadani jer je pretpostavljeno da su mase korištenog nivo-elipsoida i realne Zemlje jednake i da ishodišta nivo-elipoida i realne Zemlje koincidiraju (Torge 2001). Zbog toga se koeficijenti nižeg stupnja razvoja od $l = 2$ nazivaju datumski koeficijenti.

3. Računanje poremećajnog potencijala na osnovu globalnog geopotencijalnog modela

Poremećajni potencijal u točki P dobije se pomoću izraza

$$T_P = W_P - U_P \quad (1)$$

gdje je

- W_P realni potencijal ubrzanja sile teže u točki P,
- U_P normalni potencijal ubrzanja sile teže u točki P.

Poremećajni potencijal na osnovu globalnog geopotencijalnog modela dobije se pomoću izraza

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \left(\Delta \bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{lm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{lm}(\cos \theta) \quad (2)$$

gdje je

- GM geocentrična gravitacijska konstanta,
- r, λ, θ kugline koordinate,
- l, m stupanj i red razvoja globalnog geopotencijalnog modela,
- a velika poluos elipsoida,
- $\Delta \bar{C}_{lm}, \Delta \bar{S}_{lm}$ razlike između potpuno normaliziranih koeficijenata sfernih harmonika realnog i normalnog polja ubrzanja sile teže,
- l_{\max} maksimalni razvoj globalnog geopotencijalnog modela,
- γ normalna vrijednost ubrzanja sile teže,

- $\bar{P}_{lm}(\cos \theta)$ normirane Legendrove kugline funkcije prve vrste.

Na osnovu poremećajnog potencijala mogu se dobiti ostali elementi polja ubrzanja sile teže.

4. Računanje undulacija geoida na osnovu globalnog geopotencijalnog modela

Undulacije geoida možemo dobiti na osnovu poremećajnog potencijala primjenom Brunsove jednačbe, uz uvjet da su normalni potencijal na nivo-elipsoidu i realni potencijal na geoidu jednaki ($U_0 = W_0$), koristeći izraz

$$N = \frac{T}{\gamma}. \quad (3)$$

Gdje je T poremećajni potencijal, a γ normalna vrijednost ubrzanja sile teže.

Primjenom gornjeg izraza i izraza za poremećajni potencijal izražen u sfernim funkcijama iz prethodnog poglavlja, dobivamo izraz za računanje geoidnih undulacija pomoću globalnog geopotencijalnog modela

$$N = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (\Delta\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\cos \theta). \quad (4)$$

5. Računanje anomalije ubrzanja sile teže na osnovu globalnog geopotencijalnog modela

Za računanje anomalija ubrzanja sile teže pomoću globalnog geopotencijalnog modela koristi se izraz

$$\Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^l (l-1) \sum_{m=0}^l (\Delta\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\cos \theta). \quad (5)$$

6. Računanje poremećaja ubrzanja sile teže na osnovu globalnog geopotencijalnog modela

Poremećaj ubrzanja sile teže je definiran pomoću izraza

$$\delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \gamma_P \quad (6)$$

gdje je

- \mathbf{g}_P vektor realnog, ubrzanja sile teže u točki P,
- γ_P vektor normalnog ubrzanja sile teže u točki P.

Poremećaj ubrzanja sile teže pomoću globalnog geopotencijalnog modela računa se pomoću izraza

$$\delta g = \frac{1}{r} \sum_{l=2}^{l_{\max}} (l+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} T_l(\vartheta, \lambda) \quad (7)$$

gdje su površinske sferne harmonike za poremećajni potencijal

$$T_l(\vartheta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{m=0}^l \left(\Delta \bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{lm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{lm}(\cos \theta). \quad (8)$$

7. Računanje komponente otklona vertikalna na osnovu globalnog geopotencijalnog modela

Meridijanska komponenta ξ otklona vertikale i komponenta otklona vertikalna u prvom vertikalnu η dobiju se pomoću izraza

$$\xi = \Phi - \varphi, \quad (9)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi \quad (10)$$

gdje je

- φ elipsoidna, geodetska širina,
- λ elipsoidna, geodetska duljina,
- Φ astronomska širina,
- Λ astronomska duljina.

Komponente otklona vertikalna pomoću globalnog geopotencijalnog modela računaju se primjenom izraza

$$\xi = \frac{GM}{\gamma r^2} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \left(\Delta \bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{lm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{lm}(\cos \theta), \quad (11)$$

$$\eta = \frac{GM}{\gamma r^2 \sin \theta} \sum_{l=2}^{l_{\max}} \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l \left(\Delta \bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{lm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{lm}(\cos \theta). \quad (12)$$

8. Službene i tradicionalne jedinice potencijala ubrzanja sile teže i njegovih derivacija

Jedinice u kojima se izražava potencijal i njegove derivacije službeno su definirane u sustavu jedinica Systeme International d'Unites (SI). Međutim, još uvijek se potencijal i njegove derivacije mogu naći izražene u tradicionalnim jedinicama. Veza službenih SI i tradicionalnih jedinica je dana u tablici 4.

Tablica 4. *Veza službenih SI i tradicionalnih jedinica*

	SI sustav	Tradicionalne jedinice
Potencijal ubrzanja sile teže	$10 \text{ m}^2/\text{s}^{-2}$	1 kGal m
Prva derivacija potencijala (Ubrzanje sile teže)	10^{-2} m s^{-2}	1 Gal
Prva derivacija potencijala (Ubrzanje sile teže)	10^{-5} m s^{-2}	1 mGal
Prva derivacija potencijala (Ubrzanje sile teže)	10^{-8} m s^{-2}	1 μ Gal
Druga derivacija potencijala (Gradijent ubrzanja sile teže)	10^{-9} s^{-2}	1 E ili 0,1 mGal/km

Objašnjenje tradicionalnih jedinica iz tablice 4:

- [Gal] je jedinica ubrzanja sile teže prema starom Centimetre-Gram-Second (CGS) sustavu. Dobila je ime po talijanskom fizičaru, astronomu i matematičaru Galilei Galileiu,
- [kGal m] je kilogal metar,
- [E] je Eötvös. Dobila je ime po mađarskom fizičaru Rolandu von Eötvösu koji je konstruirao instrument za mjerenje komponenti gradijenata ubrzanja sile teže (variometar).

Literatura

- Hećimović, Ž. (2001): Modeliranje referentne plohe visinskih sustava. Doktorska disertacija. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 2001.
- Hećimović, Ž., T. Bašić (2002): Globalni geopotencijalni modeli na teritoriju Hrvatske. Geodetski list, God. 57 (80), broj 2, str. 73-89, Zagreb 2003.
- IGS (1996): International Geoid Service. Bulletin Nr. 6. Politecnico di Milano.
- Torge, W. (2001): Geodesy (3. izdanje). Walter de Gruyter. Berlin, New York 2001.