

# Određivanje vertikalnoga gradijenta ubrzanja sile teže relativnim Scintrex gravimetrima HGI-1 i HGI-2

Željko HEĆIMOVIĆ<sup>1</sup> - Zagreb

*SAŽETAK. Određivanje vertikalnoga gradijenta ubrzanja sile teže prolazilo je kroz nekoliko razvojnih razdoblja: od Brunsove formule vertikalnoga gradijenta preko Eötvösova tenzora do Marussijeva tenzora. Poznavanje vertikalnoga gradijenta prijeko je potrebno za redukciju očitavanja relativnoga gravimetra, koje se odnosi na referentnu visinu gravimetra, na visinu točke mjerenja. Da bi se očuvala kvaliteta mjerenja, treba poznavati realni vertikalni gradijent. Analizirani su kriteriji planiranja i provođenja mjerenja. Za određivanje vertikalnoga gradijenta obavljena su mjerenja s pomoću dva Scintrex CG-3M relativna gravimetra Hrvatskoga geodetskog instituta HGI-1 i HGI-2, u dvanaest ponavljanja. Nakon što su provedene redukcije mjerenja i eliminiran hod gravimetra, izvršeno je izjednačenje vertikalnoga gradijenta metodom najmanjih kvadrata. Analizirana je kvaliteta određivanja vertikalnoga gradijenta s obzirom na ponavljanje mjerenja istim gravimetrom i s obzirom na mjerenja obama gravimetrima.*

*Ključne riječi: vertikalni gradijent ubrzanja sile teže, Eötvösov tenzor, Marussijev tenzor, redukcija za visinu instrumenata, planiranje mjerenja, kvaliteta određivanja vertikalnoga gradijenta.*

## 1. Uvod

Gradijent ubrzanja sile teže promjena je ubrzanja sile teže u prostoru. U ovom radu je predmet interesa ponajprije promjena ubrzanja sile teže s visinom, odnosno vertikalni gradijent ubrzanja sile teže. Veza ubrzanja sile teže i srednje zakrivljenosti nivo plohe s vertikalnim gradijentom može se naći u radu Bruns (1878)

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \delta g = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2. \quad (1)$$

U tom je izrazu  $g$  ubrzanje sile teže,  $J$  srednja zakrivljenost nivo plohe,  $\pi$  konstanta,  $G$  gravitacijska konstanta,  $\rho$  gustoća masa i  $\omega$  kutna brzina rotacije Zemlje. Druga su dva člana generalizirana Poissonova diferencijalna jednadžba kojom se opisuje potencijal u ovisnosti o gustoći masa.

Zbog jednostavnosti određivanja, intenzitet ubrzanja sile teže je veličina koja se najčešće upotrebljava pri određivanju polja ubrzanja sile teže. Geometrija polja ubrzanja sile teže najčešće se prikazuje s pomoću diferencijalne geometrije, pri čemu se upotrebljavaju derivacije potencijala. Ubrzanje sile teže  $g$  prva je derivacija polja ubrzanja sile teže  $W$  koji su povezani izrazom

$$g = \text{grad}(W). \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> Doc. dr. sc. Željko HEĆIMOVIĆ, Hrvatski geodetski institut, Savska c. 41/XVI, PP 19, 10144 Zagreb, e-mail: [zeljko.hecimovic@hgi.hinet.hr](mailto:zeljko.hecimovic@hgi.hinet.hr).

Važnu ulogu u razvoju diferencijalne geometrije polja ubrzanja sile teže i vertikalnoga gradijenta imao je Eötvösov tenzor. On sadrži druge derivacije potencijala polja ubrzanja sile teže  $W$ , odnosno derivacije ubrzanja sile teže (Bašić 1999)

$$\text{grad}(\vec{g}) = \text{grad}(\text{grad}(W)) = [W_{ij}] = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Članovi Eötvösova tenzora su druge derivacije potencijala s obzirom na koordinatne osi, npr.  $W_{xy} = \partial^2 W / \partial x \partial y$ . Os  $z$  lokalnoga koordinatnog sustava definirana je smjerom vertikale u promatranoj točki, os  $x$  je okomita na nju i ima smjer prema sjeveru, a os  $y$  ima smjer prema istoku i okomita je na osi  $x$  i  $z$ . Osi tvore ortogonalnu bazu lokalnoga trodimenzionalnog sustava.

Polje ubrzanja sile teže u klasičnoj se teoriji potencijala smatra konzervativnim poljem koje zadovoljava

$$\nabla \times \vec{g} = \text{curl } \vec{g} = \text{curl grad} W = 0. \quad (4)$$

Gdje je  $\nabla$  Hamiltonov operator (nabla), curl operator čije zadovoljenje gornjeg izraza osigurava da u vektorskom polju nema vrtloženja. Iz navedenog uvjeta proizlaze jednakosti

$$W_{xy} = W_{yx}, \quad W_{xz} = W_{zx}, \quad W_{yz} = W_{zy}. \quad (5)$$

Ako se ograničimo samo na zadnji red Eötvösova tenzora dobivamo gradijente ubrzanja sile teže

$$\text{grad}(g) = (W_{zx} \quad W_{zy} \quad W_{zz}) = (\partial g / \partial x \quad \partial g / \partial y \quad \partial g / \partial z). \quad (6)$$

Članovi  $\partial g / \partial x$  i  $\partial g / \partial y$  opisuju promjenu ubrzanja sile teže u horizontalnoj ravnini, a član  $\partial g / \partial z$  opisuje promjenu ubrzanja sile teže u smjeru vertikale, tj. vertikalni gradijent ubrzanja sile teže.

Eötvösov tenzor može se transformirati u Marussijev tenzor oblika

$$[w_{ij}] = -\frac{[W_{ij}]}{g} = \begin{bmatrix} k_x & t_x & \kappa_x \\ t_x & k_y & \kappa_y \\ \kappa_x & \kappa_y & \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

On sadrži pet međusobno neovisnih komponenti. Marussijev tenzor osnova je *intrinsic geodesy* (diferencijalne geodezije) (Marussi 1985, Hotine 1991), zasnovane na diferencijalnoj geometriji polja ubrzanja sile teže. U gornjem su izrazu  $k_x$  i  $k_y$  komponente zakrivljenosti nivo plohe u smjerovima osi  $x$  i  $y$  dobivene uvrštavanjem vrijednosti azimuta  $A = 0^\circ$  i  $A = 180^\circ$  u izraz

$$k = \frac{1}{R_A} = -\frac{1}{g} (W_{xx} \cos^2 A + 2W_{xy} \sin A \cos A + W_{yy} \sin^2 A) \quad (8)$$

gdje je  $R_A$  polumjer zakrivljenosti nivo plohe u smjeru azimuta  $A$ . Geodetska torzija u smjeru meridijana  $t_x$  kao mjera promjene smjera normale u odnosu na meridijan dobiva se s pomoću izraza

$$t_x = -\frac{W_{xy}}{g}. \quad (9)$$

Zakrivljenost projekcije težišnice na ravninu  $x, z$  ( $A = 0^\circ$ ) dobiva se s pomoću izraza

$$\kappa_x = -\frac{W_{xz}}{g}, \quad (10)$$

a projekcija na ravninu  $y, z$  ( $A = 90^\circ$ ) dobiva se s pomoću izraza

$$\kappa_y = -\frac{W_{yz}}{g}. \quad (11)$$

Marussijev tenzor u potpunosti opisuje geometriju polja ubrzanja sile teže.

Iz ovog kratkog pregleda se vidi da je razvoj problematike vertikalnoga gradijenta razvijen u složenije strukture interpretacije polja ubrzanja sile teže. Međutim, kako se ubrzanje sile teže najviše mijenja s promjenom visine, vertikalna promjena ubrzanja sile teže je dominantna veličina i u složenijim matematičkim oblicima (Eötvösov tenzor, Marusijev tenzor).

## 2. Razlika u redukciji za visinu gravimetra pri uporabi normalne i realne vrijednosti vertikalnoga gradijenta ubrzanja sile teže

Vertikalni gradijent normalnog polja ubrzanja sile teže funkcija je širine i ovisan je o dimenzijama nivo-elipsoida. Normalni vertikalni gradijent razvijen u red do kvadratnog člana spljoštenosti ima izgled (Wenzel 1985)

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_0 = -\frac{2\gamma_0}{a}(1 + f - 2f \sin^2 \varphi + \frac{3}{2}f^2 - 2f^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2}f^2 \sin^4 \varphi) - 2\omega. \quad (12)$$

Mjerenja relativnim gravimetrima odnose se na visinu senzora gravimetra, odnosno na referentnu visinu gravimetra. Da bi se mjerene vrijednosti odnosile na visinu točke, ono se mora reducirati s referentne visine gravimetra na visinu točke ili kraće za visinu gravimetra. Male promjene u visini prouzrokuju signifikantne promjene ubrzanja sile teže. Promjena visine od 3 mm, uz normalni vertikalni gradijent, prouzrokuje promjenu ubrzanja sile teže od  $0,01 \mu\text{ms}^{-2}$ , a to je rezolucija očitavanja Scintrex CG-3M gravimetra. Redukcija za visinu gravimetra dobiva se s pomoću izraza

$$dg^i = \delta g \cdot i \quad (13)$$

gdje je  $\delta g$  vertikalni gradijent ubrzanja sile teže,  $i$  referentna visina gravimetra i  $dg^i$  redukcija za visinu gravimetra.

Ako se u gornjem izrazu upotrijebi normalni umjesto realnoga vertikalnoga gradijenta, dobivaju se različite vrijednosti redukcije za visinu gravimetra. Da bi se utvrdilo kolika je razlika pri uporabi normalnog ili realnog vertikalni gradijenta, prilikom računanja redukcije upotrebljavane su vrijednosti realnih vertikalnih gradijenata za točke Apsolutne gravimetrijske mreže Republike Hrvatske. Odredili su ih *Bundesamt für Kartographie und Geodäsie* (BKG) iz Frankfurta na Majni (Njemačka) i *Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre* (EOST) iz Sveučilišta u Strasbourgu (Francuska) prilikom apsolutnih mjerenja ubrzanja sile teže (Čolić 1997, Čolić 2000, Medak 2001, Medak i dr. 2001). U tablici 1 dane su redukcije za visinu instrumenta za normalne i realne vrijednosti vertikalnih gradijenata ubrzanja sile teže. Za visinu gravimetra korištena je vrijednost 0,250 m, a to je prosječna visina Scintrex gravimetara.

Tablica 1. Razlike u redukciji za visinu gravimetra pri uporabi normalnog (GRS80) i realnog vertikalnoga gradijenta ubrzanja sile teže

Točka	$\delta g_{\text{normalni}}$	$\delta g_{\text{realni}}$	i	$dg^i_{\text{normalni}}$	$dg^i_{\text{realni}}$	Razlike redukcije
	$[\mu\text{s}^{-2}]^*$	$[\mu\text{s}^{-2}]$	[m]	$[\mu\text{ms}^{-2}]$	$[\mu\text{ms}^{-2}]$	$[\mu\text{ms}^{-2}]$
Zagreb - Maksimir	3,085	3,24	0,250	0,771	0,810	0,039
Zagreb - Puntijarka	3,085	4,09	0,250	0,771	1,022	0,251
Pula	3,086	2,906	0,250	0,771	0,726	-0,045
Makarska	3,086	2,542	0,250	0,771	0,636	-0,135
Dubrovnik	3,086	2,883	0,250	0,771	0,721	-0,050
Osijek	3,086	2,872	0,250	0,771	0,718	-0,053

Iz tablice 1 vidljivo je da se razlike redukcije za visinu instrumenta mijenjaju različito od točke do točke. One ovise o razlici normalnog i realnog vertikalnoga gradijenta na pojedinoj točki. Razlike redukcije na svim su točkama veće od rezolucije mjerenja Scintrex CG-3M gravimetrima, koja iznosi  $0,01 \mu\text{ms}^{-2}$ . Na apsolutnim točkama Puntijarka i Makarska razlike u redukciji izrazito su velike i iznose  $0,251 \mu\text{ms}^{-2}$  i  $-0,135 \mu\text{ms}^{-2}$ . Iz toga slijedi da je pri uporabi normalnog umjesto realnog vertikalnoga gradijenta za računanje redukcija za visinu gravimetra pogreška signifikantna.

Iz navedenog se vidi da treba poznavati realni vertikalni gradijent da bi se mogla ispravno odrediti redukcija za visinu instrumenta i da se ne bi nepravilnom redukcijom kvarila mjerenja. On je pod utjecajem lokalnog rasporeda masa i nepravilno se mijenja. Zbog toga se ne može pouzdano modelirati, već ga treba odrediti mjerenjem na promatranoj točki.

### 3. Određivanje vertikalnoga gradijenta s relativnim gravimetrom

Relativnim gravimetrima ne može se izravno mjeriti vertikalni gradijent, ali se on može odrediti na osnovi relativnih mjerenja na različitim visinama iste točke. Mjerenjem relativnim

\* Službena jedinica za gradijent ubrzanja sile teže, prema *Systeme International d'Unites* (SI), je recipročna vrijednost kvadrata sekunde  $[\text{s}^{-2}]$ . Međutim, u literaturi se može naći i stara jedinica Eötvös [E]. Veza između jedinica je  $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2} = 0,1 \text{ mGal/km}$ . U literaturi se mogu za gradijent naći i jedinice  $[\text{ms}^{-2}/\text{m}]$  ili  $[\text{mGal}/\text{m}]$ .

gravimetrom na različitim visinama dobiju se razlike ubrzanja sile teže, a mjerenjem visina između stajališta može se odrediti vertikalni gradijent s pomoću izraza

$$\delta g = \frac{z_j - z_k}{i_j - i_k} = \frac{\Delta z_{jk}}{\Delta i_{jk}}, \quad (14)$$

gdje su  $z_{j,k}$  očitavanja gravimetra na vertikalnim stajalištima  $j$  i  $k$ ,  $i_{j,k}$  referentne visine gravimetra na stajalištima  $j$  i  $k$ ,  $\Delta z_{jk}$  razlika očitavanja i  $\Delta i_{jk}$  razlika referentnih visina gravimetra.

Da bi se dobio uvid u osjetljivost vertikalnoga gradijenta s obzirom na promjenu razlike ubrzanja sile teže  $\Delta g_{jk} \equiv \Delta z_{jk}$  i na promjenu visinske razlike stajališta  $\Delta i_{jk}$ , na izraz (14) primjenjuje se zakon o prirastu varijance za nekorelirana mjerenja. Njegovom primjenom, ako visinsku razliku između točaka  $\Delta i_{jk}$  smatramo nepogrešnom, odnosno konstantnom, dobije se izraz

$$\sigma^2_{\delta g} = \frac{1}{\Delta i^2} \sigma^2_{\Delta g}. \quad (15)$$

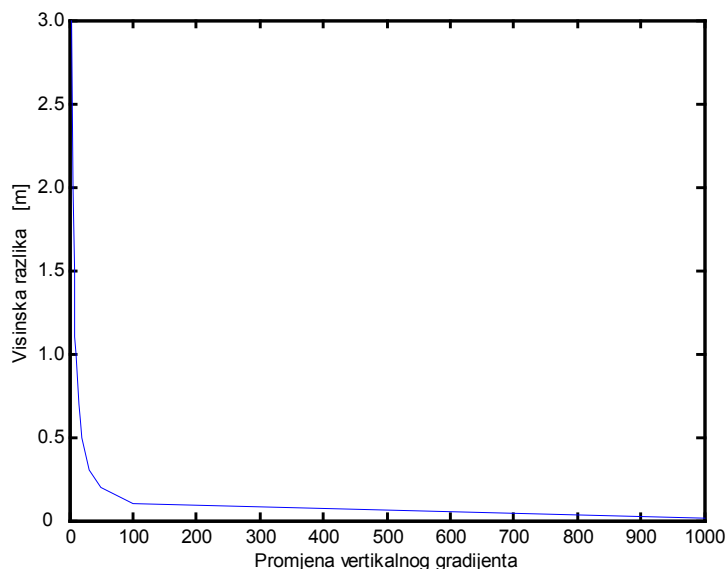
Da bi se dobio uvid u osjetljivost vertikalnoga gradijenta, u prethodnom izrazu će se za vrijednosti visinskih razlika između stajališta  $\Delta i$  upotrijebiti vrijednosti od 0,010 do 3,000 m. Navedene vrijednosti upotrebljavaju se relativnim mjerenjima za potrebe određivanja vertikalnoga gradijenta. Za standardno odstupanje mjerenja razlike ubrzanja sile teže  $\sigma_{\Delta g}$  upotrebljava se vrijednost od  $0,01 \mu\text{ms}^{-2}$ , a to je rezolucija mjerenja Scintrex CG-3M gravimetrom. To je vrlo optimistična veličina i pri mjerenju će varijanca biti veća. Uvođenjem navedenih vrijednosti u izraz (15) dobiva se osjetljivost vertikalnoga gradijenta s obzirom na promjenu visinske razlike stajališta uz konstantnu varijancu mjerenja. Rezultati su prikazani u tablici 2 i na slici 1.

Tablica 2. Promjena vertikalnoga gradijenta s obzirom na promjenu visinske razlike stajališta

$\Delta i$	[m]	0,010	0,100	0,200	0,300	0,500	0,600	0,700	1,000	1,100	1,300	1,500	2,000	3,000
$\sigma_{\delta g}$	[ $\text{ns}^{-2}$ ]	1000	100	50	30	20	17	14	10	9	8	7	5	3

Na slici 1 vidi se da dolazi do velikih promjena vertikalnoga gradijenta pri visinskim razlikama stajališta manjim od 0,200 m. Pri visinskim razlikama od 0,200 do 1,000 m promjene su znatno blaže, a nakon 1,000 m imaju blago asimptotsko opadanje. Iz toga slijedi da je vertikalni gradijent znatno osjetljiviji na pogreške mjerenja pri mjerenju na manjim visinskim razlikama stajališta. Zbog toga je poželjno da su visinske razlike između stajališta veće.

Razlika ubrzanja sile teže od  $0,01 \mu\text{ms}^{-2}$  (rezolucija očitavanja) pri visinskoj razlici od 0,300 m, uzrokuje promjenu vertikalnoga gradijenta od  $30 \text{ ns}^{-2}$  (v. tablicu 2), a to je gornja granica tražene kvalitete određivanja vertikalnoga gradijenta na osnovi mjerenja istim gravimetrom u više ponavljanja, kao što će poslije u tekstu biti izloženo. Proizlazi da visinska razlika između stajališta mora biti veća od 0,300 m da bi se mogli zadovoljiti zadani kriteriji određivanja vertikalnoga gradijenta. Iz provedenog se ispitivanja vidi da male promjene razlike ubrzanja sile teže (pogreške mjerenja) imaju za posljedicu signifikantne promjene vertikalnoga gradijenta.



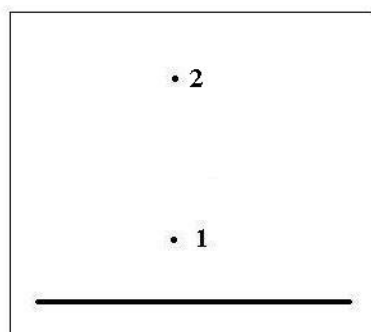
Slika 1. Promjena vertikalnoga gradijenta u  $[ns^{-2}]$  s obzirom na promjenu visinske razlike stajališta u  $[m]$

Prilikom mjerenja relativnim gravimetrima kada su visine gravimetra ispod 0,500 m i za računanje redukcije za visinu gravimetra treba poznavati vertikalni gradijent na tim visinama. Međutim, iz prethodne analize se vidi, zbog velikog zahtjeva na mjerenja relativnim gravimetrima, nije jednostavno pouzdano odrediti vertikalni gradijent za visinske razlike ispod 0,500 m.

Na osnovi mjerenja relativnim gravimetrima određuje se linearni gradijent između dvaju stajališta. Prilikom odabira visine stajališta gravimetra, osim opisanih kriterija s obzirom na visinske razlike stajališta i odnosa kvalitete mjerenja s obzirom na zahtijevanu kvalitetu vertikalnoga gradijenta, treba voditi računa da su visine stajališta dovoljno guste da pouzdano opisuju nelinearnu promjenu vertikalnoga gradijenta s visinom. Problem nelinearnosti vertikalnoga gradijenta javlja se kao još jedan kriterij prilikom odabira visine stajališta. Vertikalni gradijent osjetljiv je na lokalne promjene rasporeda masa, tj. na promjene reljefa i gustoće površinskih masa. O anomalnosti polja ubrzanja sile teže na stajalištu ovisi koliki mora biti visinski razmak između stajališta. Utjecaj nelinearnosti vertikalnoga gradijenta naročito dolazi do izraza na gravimetrijskim točkama koje su stabilizirane ispod razine zemlje (npr. podrumi, atomska skloništa), gdje se vertikalni gradijent mijenja nepravilno i za veće iznose. Na tim točkama treba mjeriti na više vertikalno razmaknutih stajališta s manjim visinskim razlikama.

Na osnovi prethodno iznesenoga vidi se da određivanje vertikalnoga gradijenta ima velike zahtjeve na mjerenja relativnim gravimetrom. Zbog toga relativnim mjerenjima ubrzanja sile teže za potrebe određivanja vertikalnoga gradijenta treba posvetiti osobitu pozornost.

Mjerenja relativnim gravimetrima, koja su obrađena u ovom radu, provedena su na šesnaestom katu nebodera Zagrepčanka, gdje je, zbog visine točke, utjecaj promjena rasporeda masa malen i polje ubrzanja sile teže uglačanije nego na fizičkoj površini Zemlje. Zbog toga je mjereno samo na dvije visine (v. sl. 2), razmak kojih je nešto veći od jednog metra (v. tablicu 3).



Slika 2. Stajališta za određivanje vertikalnoga gradijenta

Tablica 3. Referentne visine gravimetra

Stajalište	Visine senzora [m]
1	0,258
2	1,340

Mjerenja obama gravimetrima obavljeno je na istoj referentnoj visini. Iz tablice 3 vidi se da je visinska razlika između stajališta prilikom mjerenja iznosila 1,082 m. Uvrštavanjem te vrijednosti i vrijednosti od  $0,01 \mu\text{ms}^{-2}$  za standardno odstupanje razlika ubrzanja sile teže u izraz (15) dobiva se standardno odstupanje vertikalnoga gradijenta od  $9 \text{ ns}^{-2}$ . To znači da pogreška mjerene razlike ubrzanja sile teže, koja je veličine rezolucije očitavanja gravimetra za navedenu visinsku razliku stajališta, prouzrokuje razliku vertikalnoga gradijenta od  $9 \text{ ns}^{-2}$ . To je jedinična osjetljivost vertikalnoga gradijenta za definiranu visinsku razliku stajališta i zadanu rezoluciju gravimetra. Navedeni postupak povezuje osjetljivost određivanja vertikalnog gradijenta, visinsku razliku stajališta i osjetljivost mjernog senzora gravimetra je osnova za optimiranje mjerenja vertikalnog gradijenta relativnim gravimetrima.

Da bi se izbjegao utjecaj umjetno izazvane mikroseizmike nebodera Zagrepčanka na mjerenja, ona su provedena vikendom i nakon radnog vremena, kada je taj utjecaj malen.

Mjerenja su provedena dvama Scintrex CG-3M gravimetrima Hrvatskoga geodetskog instituta HGI-1 i HGI-2, u dvanaest ponavljanja. U realnom vremenu upotrijebljene su redukcije za faktor skaliranja očitavanja, a priori hod gravimetra, promjenu nagiba gravimetra, promjenu temperature senzora i Zemljine plimne valove. U naknadnoj obradbi računane su redukcije zbog promjene tlaka zraka i promjene položaja osi rotacije Zemlje.

#### 4. Redukcija zbog promjene tlaka zraka

S promjenom tlaka zraka mijenja se vrijednost ubrzanja sile teže. Da bi se taj utjecaj mogao otkloniti mjeren je tlak zraka. Utjecaj se računa s obzirom na tlak normalne atmosfere DIN 5450 po izrazu koji preporučuje *International Association of Geodesy* (IAG) u rezoluciji br. 9, 1983. godine

$$P_n = 1013,25 \left( 1 - \frac{0,0065 \cdot H}{288,15} \right)^{5,2559} \quad (16)$$

Ako se visina stajališta  $H$  unese u metrima, dobiva se vrijednost normalnog tlaka zraka  $P_n$  u hektopaskalima [hPa]. Redukcija ubrzanja sile teže dobiva se po izrazu

$$dg_p = 0,30 (P_i - P_i^n) \quad (17)$$

gdje je  $P_i$  [hPa] mjerena vrijednost tlaka zraka na stajalištu  $i$ ,  $P_i^n$  [hPa] normalna vrijednost tlaka zraka dobivena po izrazu (16) i  $dg_p$  redukcija ubrzanja sile teže u jedinicama [ $10^{-8} \text{ ms}^{-2}$ ]. Tlak zraka mora se poznavati s pouzdanošću od 3 hPa da bi ta korekcija bila određena s pouzdanošću unutar rezolucije gravimetra Scintrex CG-3M.

## 5. Redukcija zbog promjene položaja osi rotacije Zemlje

Zbog promjene položaja osi rotacije Zemlje dolazi do promjene udaljenosti stajališta od osi rotacije Zemlje i do promjene centrifugalnog ubrzanja. Da bi se otklonio taj utjecaj upotrebljava se izraz (Torge 1989)

$$dg_{\text{pol}}(t) = -1,164 \omega^2 R \sin 2\varphi (x(t) \cos \lambda - y(t) \sin \lambda) \quad [\text{ms}^{-2}] \quad (18)$$

gdje su

$\omega = 7,292 \cdot 10^{-5}$  [rad/s] – kutna brzina rotacije Zemlje,

$R = 6371 \cdot 10^3$  [m] – polumjer zakrivljenosti Zemlje,

$\varphi, \lambda$  – geodetske koordinate stajališta,

$x(t), y(t)$  [rad] – položaj trenutačnog u odnosu na konvencionalni Zemljin pol.

Za vrijednosti položaja Zemljina pola  $x(t)$  i  $y(t)$  upotrijebljene su vrijednosti iz biltena *International Earth Rotation Service* (IERS).

## 6. Hod gravimetra

Hod gravimetra ima sustavni utjecaj na mjerenja, te se mora ukloniti iz mjerenja. Dnevni hod određen je s pomoću izraza

$$y_i = a_1 + a_2 t_i + \dots + a_M t_i^{M-1} \quad (19)$$

gdje su  $y_i$  mjerenja gravimetra,  $a_i$  nepoznati parametri i  $t_i$  vrijeme. Primjenom gornjeg izraza uklonjen je linearan hod iz mjerenja.

## 7. Izjednačenje vertikalnoga gradijenta ubrzanja sile teže

Funkcionalni model koji povezuje mjerene veličine i traženi vertikalni gradijent ima oblik

$$\delta g = \frac{z_j - z_k}{i_j - i_k} = \frac{\Delta z_{jk}}{\Delta i_{jk}} \quad (20)$$

gdje su  $l_{jk}$  visine gravimetra,  $z_{jk}$  mjerenja gravimetra i  $\delta g$  vertikalni gradijent. Na osnovi prethodnog izraza dobivaju se jednadžbe popravaka

$$\Delta z_{jk} + v_{jk} = \Delta i_{jk} \cdot \delta g. \quad (21)$$

Mjereno je u više ponavljanja, te su na raspolaganju prekobrojna mjerenja. Najvjerojatnija vrijednost dobiti će se metodom najmanjih kvadrata minimizirajući norme

$$\min_v \left\| \bar{v}^T \bar{P} \bar{v} \right\| \quad (22)$$

i

$$\min_x \left\| \bar{x}^T \bar{x} \right\| \quad (23)$$

gdje je  $\bar{v}$  vektor popravaka,  $\bar{P}$  matrica težina i  $\bar{x}$  vektor nepoznanica. Izjednačenje se provodi s pomoću klasičnog izraza posrednog izjednačenja

$$\bar{I} + \bar{v} = \bar{A} \bar{x}, \quad (24)$$

gdje je  $\bar{I}$  vektor mjerenja i  $\bar{A}$  konfiguracijska matrica. Matrica normalnih jednadžbi dobiva se s pomoću izraza

$$\bar{N} = \bar{A}^T \bar{P} \bar{A}. \quad (25)$$

Invertiranje matrice normalnih jednadžbi provedeno je metodom dekompozicije na singularne vrijednosti (Hećimović 1991) s pomoću izraza

$$\bar{N}^+ = \bar{U} \bar{S}^{-1} \bar{V}. \quad (26)$$

Inverzija zadovoljava uvjete generalizirane inverzije s obzirom na Moor-Penroseove uvjete

$$\begin{aligned} \bar{N}^+ \bar{N} \bar{N}^+ &= \bar{N}^+, \\ \bar{N} \bar{N} \bar{N}^+ &= \bar{N}^+, \\ (\bar{N}^+ \bar{N})^T &= \bar{N}^+ \bar{N}, \\ (\bar{N} \bar{N}^+)^T &= \bar{N} \bar{N}^+. \end{aligned} \quad (27)$$

Slobodno izjednačenje omogućava dobivanje vertikalnoga gradijenta bez datumske prisile. Pri slobodnom izjednačenju datum je definiran kao minimalna norma vektora nepoznanica u odnosu na koje su definirani reziduali (popravke). Na taj način je linearni model izjednačenja optimalno prilagođen mjerenjima i izbjegnute su sustavni utjecaji datuma. To je pri analizi mjerenja relativnim gravimetrima bitno jer nikada ne možemo biti potpuno sigurni da smo sustavne utjecaje potpuno eliminirali (hod, utjecaj temperature,...), a ako imamo prisutan i sustavni utjecaj datuma sustavne utjecaje gravimetra ne možemo objektivno analizirati. Nepoznanice i popravci dobivaju se s pomoću izraza

$$\bar{x} = \bar{N}^+ \bar{A}^T \bar{P} \bar{I}, \quad (28)$$

$$\bar{v} = \bar{A} \bar{x} - \bar{I}, \quad (29)$$

a varijanca jedinične težine s pomoću izraza

$$s_0^2 = \frac{\vec{v}^T \vec{P} \vec{v}}{m - n - d}, \quad (30)$$

gdje je m broj mjerenja, n broj nepoznanica, a d defekt. Standardno odstupanje nepoznanica dobiva se s pomoću izraza

$$s_{\delta g} = s_0 \sqrt{q_{xx}}, \quad (31)$$

gdje je  $q_{xx}$  dijagonalni član inverzne matrice normalnih jednadžbi. Standardna odstupanja izjednačenih mjerenih veličina dobit će se s pomoću izraza

$$s_{\Delta z} = s_0 \sqrt{q_{ii}}, \quad (32)$$

gdje je  $q_{ii}$  dijagonalni član matrice

$$\vec{Q} = \vec{A} \vec{N} + \vec{A}^T. \quad (33)$$

## 8. Rezultati određivanja vertikalnoga gradijenta

Primjenom navedenih redukcija i hoda te izjednačenjima dobiveni su vertikalni gradijenti ubrzanja sile teže. Primjenom slobodnog izjednačenja konačne vrijednosti vertikalnoga gradijenta su oslobođene sustavnog utjecaja datuma, a to omogućuje njihovu pouzdanu procjenu. Vrijednosti vertikalnih gradijenata s pripadajućim standardnim odstupanjima za svako od 12 ponavljanja za gravimetar HGI-1 dane su u tablici 4.

Tablica 4. Vrijednosti vertikalnoga gradijenta za gravimetar HGI-1

Ponavljanje	$\delta g$ [ns <sup>-2</sup> ]	$s_{\delta g}$ [ns <sup>-2</sup> ]
1.	3150	16
2.	3172	7
3.	3133	14
4.	3170	17
5.	3118	10
6.	3204	14
7.	3154	18
8.	3179	10
9.	3166	12
10.	3174	9
11.	3144	8
12.	3178	13

Vrijednosti vertikalnoga gradijenta s pripadajućim standardnim odstupanjima za svako od 12 ponavljanja za gravimetar HGI-2 dane su u tablici 5.

Tablica 5. *Vrijednosti vertikalnoga gradijenta za gravimetar HGI-2*

Ponavljjanje	$\delta g$	$S_{\delta g}$
	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$
1.	3121	18
2.	3159	18
3.	3161	32
4.	3142	10
5.	3144	18
6.	3160	16
7.	3104	16
8.	3156	12
9.	3138	14
10.	3141	17
11.	3142	11
12.	3144	9

Konačne vrijednosti vertikalnoga gradijenata za pojedini gravimetar dobivene su izjednačenjem svih mjerenja pojedinoga gravimetra. Konačne vrijednosti gradijenata za gravimetar HGI-1 i HGI-2 s pripadajućim standardnim odstupanjima predočene su u tablici 6. U stupcu "Sva mjerenja HGI-1" konačna je vrijednost vertikalnoga gradijenta za gravimetar HGI-1, a u stupcu "Sva mjerenja HGI-2" konačna je vrijednost vertikalnoga gradijenta za gravimetar HGI-2. Konačna vrijednost vertikalnoga gradijenta na osnovi izjednačenja svih mjerenja gravimetrima HGI-1 i HGI-2 dana je u stupcu "Sva mjerenja HGI-1 i HGI-2" tablice 6.

Tablica 6. *Konačne vrijednosti vertikalnoga gradijenta*

	Sva mjerenja HGI-1	Sva mjerenja HGI-2	Sva mjerenja HGI-1 i HGI-2
	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$
$\delta g$	3163	3142	3153
$S_{\delta g}$	4	5	3

Na osnovi razlika vrijednosti vertikalnoga gradijenta u pojedinom ponavljanju i konačne vrijednosti za pojedini gravimetar, dobiven je uvid u kvalitetu određivanja vertikalnoga gradijenta za pojedini gravimetar. Rezultati su dani u tablici 7, a u tablici 8 su uz zanemarivanje korelacije dani glavni pokazatelji njihove statističke varijabilnosti.

Tablica 7. *Razlike vrijednosti vertikalnoga gradijenta u pojedinom ponavljanju i konačnih vrijednost za gravimetre HGI-1 i HGI-2*

Razlike	1. Pon.	2. Pon.	3. Pon.	4. Pon.	5. Pon.	6. Pon.	7. Pon.	8. Pon.	9. Pon.	10. Pon.	11. Pon.	12. Pon.
	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$	$[\text{ns}^{-2}]$
HGI-1 – Sva mj. HGI-1	13	-8	30	-7	46	-41	10	-15	-2	-1	20	-14
HGI-2 – Sva mj. HGI-2	21	-17	-19	-1	-2	-18	37	-15	3	0	0	-2

Tablica 8. *Statistička varijabilnost razlika gradijenta*

	Minimum	Maksimum	Sredina	Standardna odstupanja
	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]
HGI-1 – Sva mj. HGI-1	-41	46	2	23
HGI-2 – Sva mj. HGI-2	-19	37	-1	17

Iz tablice 8 vidljivo je da se razlike određivanja vertikalnoga gradijenta u odnosu na konačnu vrijednost za pojedini gravimetar kreću u rasponu od 87 ns<sup>-2</sup> za gravimetar HGI-1. Dvije vrijednosti prelaze iznos od 30 ns<sup>-2</sup>. Za gravimetar HGI-2 razlike su kreću u rasponu od 56 ns<sup>-2</sup> i jedna vrijednost prelazi iznos od 30 ns<sup>-2</sup>. Standardno odstupanje vertikalnoga gradijenta za gravimetar HGI-1 je 23 ns<sup>-2</sup>, a za gravimetar HGI-2 iznosi 17 ns<sup>-2</sup>. Iz toga slijedi da je disperzija pojedinog rješenja oko konačne vrijednosti vertikalnoga gradijenta za gravimetar HGI-2 manja te je postignuta veća preciznost određivanja vertikalnoga gradijenta.

Za kriterije za procjenu kvalitete dobivanja vertikalnog gradijenta relativnim gravimetrima u literaturi se može naći:

- prema Torge (1989) preciznost određivanja vertikalnoga gradijenta relativnim gravimetrom iznosi nekoliko 10 ns<sup>-2</sup>,
- preciznost određivanja vertikalnoga gradijenta relativnim gravimetrima koju postižu *Bundesamt für Kartographie und Geodäsie* (BKG) iz Njemačke, *Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre* (EOST) iz Francuske, *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen* (BEV) iz Austrije i *Finnish Geodetic Institute* (FGI) iz Finske za potrebe redukcije mjerenih apsolutnih vrijednosti ubrzanja sile teže iznosi od 10 do 35 ns<sup>-2</sup>,
- kvaliteta vertikalnih gradijenata koje su odredili BKG i EOST prilikom premjera Apsolutne gravimetrijske mreže Republike Hrvatske se kreću u rasponu od 10 do 30 ns<sup>-2</sup>.

Standardna odstupanja za gravimetre HGI-1 i HGI-2 su unutar navedenih vrijednosti, te je postignuta kvaliteta određivanja vertikalnoga gradijenta s obzirom na ponovljivost mjerenja istim gravimetrom unutar kriterija koje postižu svjetski renomirane institucije.

U prethodnom dijelu analizirana je kvaliteta vertikalnoga gradijenta na osnovi ponavljanja mjerenja pojedinoga gravimetra. Kako su neovisna mjerenja provedena dvama gravimetrima, može se rezultat analizirati ne samo s obzirom na ponovljivost mjerenja jednim gravimetrom, već se može analizirati i kvaliteta vertikalnoga gradijenta koja nije ovisna o sustavnim pogreškama pojedinog gravimetra. Na taj se način dobiva pouzdaniji uvid u konačni rezultat, koji nije ovisan samo o jednom instrumentu, a sustavne pogreške obaju gravimetra se mogu procijeniti. U tu svrhu računane su razlike vrijednosti vertikalnoga gradijenta u pojedinom ponavljanju i konačne vrijednosti gradijenta dobivene na osnovi svih mjerenja obama gravimetrima. Kao osnova za analizu uzeta je konačna vrijednost dobivena izjednačenjem svih mjerenja gravimetrima HGI-1 i HGI-2 (v. tablicu 6). Rezultati su predočeni u tablici 9.

Tablica 9. Razlike vrijednosti vertikalnoga gradijenta pojedinog ponavljanja i konačne vrijednosti gradijenta

Razlike	1. Pon.	2. Pon.	3. Pon.	4. Pon.	5. Pon.	6. Pon.	7. Pon.	8. Pon.	9. Pon.	10. Pon.	11. Pon.	12. Pon.
	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]
HGI1 – Sva mj. HGI1 i HGI2	3	-19	20	-17	35	-51	-1	-26	-13	-21	9	-25
HGI2 – Sva mj. HGI1 i HGI2	32	-6	-8	11	9	-7	49	-4	15	12	11	9

U tablici 10 dani su pokazatelji statističke varijabilnosti razlika iz tablice 9.

Tablica 10. Statistička varijabilnost razlika u odnosu na konačnu vrijednost gradijenta

	Minimum	Maksimum	Sredina	Standardna odstupanja
	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]	[ns <sup>-2</sup> ]
HGI-1 – Sva mj. HGI-1 i HGI-2	-51	35	-9	23
HGI-2 – Sva mj. HGI-1 i HGI-2	-8	49	10	17
HGI-1 – Sva mj. HGI-1 i HGI-2 i HGI2 – Sva mj. HGI1 i HGI2	-51	49	1	22

Maksimalan raspon razlika pojedinih određivanja vertikalnoga gradijenta u odnosu na definitivnu vrijednost za oba gravimetra iznosi 100 ns<sup>-2</sup>; pritom četiri od 24 vrijednosti prelaze iznos od 30 ns<sup>-2</sup>. Sredina razlika za gravimetar HGI-1 iznosi -9 ns<sup>-2</sup>, a za gravimetar HGI-2 iznosi 10 ns<sup>-2</sup>. Iz toga proizlazi da se rješenja gravimetrima HGI-1 i HGI-2 razlikuju za 19 ns<sup>-2</sup>. Razlike konačnih vrijednosti gradijenata za gravimetre HGI-1 i HGI-2 iz tablice 6 razlikuju se za 21 ns<sup>-2</sup>. Standardno odstupanje razlika vertikalnih gradijenata u odnosu na konačnu vrijednost iznosi 22 ns<sup>-2</sup>.

Na osnovi iznosa razlika konačnih vertikalnih gradijenata za gravimetre HGI-1 i HGI-2 od 19 ns<sup>-2</sup> (odnosno 21 ns<sup>-2</sup>) može se procijeniti da su preostali sustavni utjecaji za oba gravimetra unutar zahtijevane kvalitete određivanja vertikalnoga gradijenta, a to ukazuje na malen utjecaj preostalih sustavni utjecaj gravimetara HGI-1 i HGI-2. Iz navedenog se također vidi da je zajedničko određivanje vertikalnoga gradijenta gravimetrima HGI-1 i HGI-2 unutar granica zahtijevane kvalitete.

## 9. Zaključci

Prilikom mjerenja relativnim gravimetrom moraju se mjerenja, koja se odnose na referentnu visinu gravimetra, reducirati na visinu točke. Ako se prilikom redukcije upotrebljava normalna umjesto realne vrijednost vertikalnoga gradijenta ubrzanja sile teže, pogreška redukcije za visinu gravimetra kviri mjerenja. Koliki će biti iznos pogreške ovisi o razlici normalnog i realnog vertikalnoga gradijenta za pojedinu točku.

Prilikom mjerenja relativnim gravimetrima s rezolucijom mjerenja od 0,01 μms<sup>-2</sup>, za određivanje vertikalnoga gradijenta moraju se upotrebljavati visinske razlike između stajališta veće od 0,300 m jer već pogreška mjerenja ubrzanja sile teže veličine rezolucije očitavanja

Scintrex CG-3M gravimetrom prouzrokuje promjenu vertikalnoga gradijenta koja je na granici dopuštenoga.

Određivanje vertikalnoga gradijenta relativnim gravimetrima ima velike zahtjeve na mjerenja. Zbog toga treba planiranju i provođenju relativnih mjerenja ubrzanja sile teže za potrebe određivanja vertikalnoga gradijenta posvetiti veliku pozornost.

Kao jedan od pokazatelja kvalitete dobivenog vertikalnoga gradijenta analizirana je ponovljivost mjerenja istim gravimetrom. Kao kriterij korištena su standardna odstupanja razlika pojedinog ponavljanja i konačnog vertikalnoga gradijenta na osnovi svih mjerenja pojedinoga gravimetra. Za gravimetar HGI-1 dobivena je standardno odstupanje od  $23 \text{ ns}^{-2}$ , a za gravimetar HGI-2 dobiveno je standardno odstupanje od  $17 \text{ ns}^{-2}$ , što je unutar međunarodnih kriterija kvalitete određivanja vertikalnoga gradijenta relativnim gravimetrima. Konačne vrijednosti vertikalnoga gradijenta određene s pomoću HGI-1 i HGI-2 razlikuju se  $19 \text{ ns}^{-2}$  (odnosno  $21 \text{ ns}^{-2}$ ), a to upućuje na male preostale sustavne utjecaje u mjerenjima za oba gravimetra.

Za kriterij analize kvalitete konačne vrijednosti vertikalnoga gradijenta, dobivene na osnovi svih mjerenja obama gravimetrima, korišteno je standardno odstupanje razlika između vrijednosti vertikalnoga gradijenta u pojedinoj seriji i konačne vrijednosti vertikalnoga gradijenta dobivenih na osnovi svih mjerenja s HGI-1 i HGI-2. Dobiveno je standardno odstupanje vertikalnoga gradijenta od  $22 \text{ ns}^{-2}$  što je također unutar međunarodnih kriterija kvalitete određivanja vertikalnoga gradijenta relativnim gravimetrima.

Rezultati ukazuju da se gravimetrima Hrvatskog geodetskog instituta HGI-1 i HGI-2 mogu određivati vertikalni gradijenti ubrzanja sile teže s obzirom na međunarodne standarde.

## 10. Literatura

- Bašić, T. (1999): Fizikalna geodezija I. Skripta Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 1999.
- Bruns, H. (1878): Die Figur der Erde. Publ. Königl. Preuß. Geod. Inst., Berlin 1878.
- Čolić, K. (1997): Izvješće o radovima na projektu: Pripajanje Republike Hrvatske u svjetsku apsolutnu gravimetrijsku mrežu, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 1997.
- Čolić, K. (2000): Elaborat o izvršenim radovima na projektu: Priključenje Republike Hrvatske u svjetsku apsolutnu gravimetrijsku mrežu, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 2000.
- Hećimović, Ž. (1991): Prilog interpretaciji problema izjednačenja. Geodetski list, God. 45, 10-12, 339-356, Zagreb 1991.
- Hotine, M. (1991): Differential Geodesy. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1991.
- Marussi, A. (1985): Intrinsic Geodesy. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1985.
- Medak, D. (2001): Elaborat o izvršenim radovima na projektu: Priključenje Republike Hrvatske u svjetsku apsolutnu gravimetrijsku mrežu - Druga faza projekta UNIGRACE, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 2001.
- Medak, D., B. Pribičević, A. Đapo (2001): Priključenje Republike Hrvatske u svjetsku apsolutnu gravimetrijsku mrežu - Projekt UNIGRACE. str. 23-32, Izvješće o znanstveno-stručnim projektima iz 2000. godine. Državna geodetska uprava, Zagreb 2001.
- Torge, W. (1989): Gravimetry, Walter de Gruyter.
- Wenzel, H.-G. (1985): Schwerenetze. U: H. Pelter (Ed.): Geodaetische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, 457 - 486, K. Witter, Stuttgart 1985.

## Determination of vertical gravity gradient using relative Scintrex gravimeters HGI-1 and HGI-2

*ABSTRACT: Theoretical development of a vertical gravity gradient has few milestones; from Bruns gradient formula over Eötvös tensor to Marussi tensor. Knowing vertical gravity gradient is necessary for the reduction of measured values of relative gravimeter to the height of the point. Real vertical gravity gradient should be known. Criteria for planning and making measurements are analysed. Measurements for determination of vertical gravity gradients are done with two Scintrex CG-3M gravimeters of Croatian Geodetic Institute HGI-1 and HGI-2. Measurements are repeated 12 times. After elimination of reductions and drift, adjustments of vertical gravity gradient are done using least square method. Quality of obtained vertical gravity gradient is analysed. Quality considering repetitions of measurements using the same gravimeter and considering all measurements with both gravimeters is analysed.*

*Key words: vertical gravity gradient, Eötvös tensor, Marussi tensor, reduction for gravimeter height, measurements design criteria, quality of vertical gradient determination.*