

Računanje parametara nivo-elipsoida

Željko HEĆIMOVIĆ - Zagreb¹

SADRŽAJ: Nivo-elipsoid je osnovno matematičko fizikalno tijelo koje se primjenjuje u geodeziji. Zadaje se s pomoću četiriju osnovnih parametara. Osim tih parametara potrebno je poznavati i matematičke i fizikalne parametre koji se iz njih izvode. Obradeno je izračunavanje izvedenih parametara nivo-elipsoida na temelju četiriju osnovnih parametara. Dani su primjeri za GRS80 i WGS84 nivo-elipsoide, te za Besselov elipsoid.

Ključne riječi: nivo-elipsoid, osnovni parametri nivo-elipsoida, velika poluos, spljoštenost elipsoida, dinamički faktor oblika, gravitacijska geocentrična konstanta, kutna brzina rotacije.

1. Uvod

Prema Stokesovu teoremu polje ubrzanja sile teže u vanjskom području nekog tijela jedinstveno je definirano ako je poznata rubna ploha tijela, kutna brzina rotacije i masa.

Osnovno matematičko fizikalno tijelo u geodeziji je nivo-elipsoid, koji je definiran geometrijski i fizikalno. Rubna ploha nivo-elipsoida je rotacijski elipsoid. On je dvoparametarska matematička ploha te su za njegovo definiranje dovoljna dva parametra. To su najčešće velika poluos a i spljoštenost elipsoida f . Umjesto spljoštenosti upotrebljava se i dinamički faktor oblika J_2 . Fizikalna svojstva nivo-elipsoida zadaju se također s pomoću dvaju parametara. To su najčešće geocentrična gravitacijska konstanta GM i kutna brzina rotacije nivo-elipsoida (Zemlje) ω . Četiri osnovna parametra dovoljna su za definiranje nivo-elipsoid kao geometrijsko i fizikalno tijelo te da definiraju polje ubrzanja sile teže u njegovu vanjskom području. Na temelju njih mogu se izračunati svi relevantni parametri nivo-elipsoida. Na XVII. generalnom skupu International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG) u Canberri odlučeno je da se za četiri osnovna parametra koriste: ekvatorski radijus a , geocentrična gravitacijska konstanta GM , dinamički faktor oblika J_2 i kutna brzina rotacije Zemlje ω . Tada je definiran model nivo-elipsoida Geodetic Reference System 1980 (GRS80). U kasnijim je modelima dinamički faktor oblika J_2 redovito zamijenjen spljoštenošću elipsoida f .

U Hrvatskoj je službeno u upotrebi Besselov elipsoid, koji je prilagođen za lokalno područje. On se zadaje geometrijskim parametrima, a fizikalni parametri nisu definirani te on nije nivo-elipsoid već samo rotacijski elipsoid koji se koristi kao geometrijska ploha.

2. Pregled korištenih formula

Izrazi za računanje parametara nivo-elipsoida mogu se naći u Heiskanen i Moritz (1967) i

¹ Dr. sc. Željko HEĆIMOVIĆ, Hrvatski geodetski institut, Savska c. 41/XVI, PP19, 10000 Zagreb, e-mail: zeljko.hecimovic@hgi.hinet.hr.

Moritz (1984). Razlikujemo dva slučaja s obzirom dali je među zadanim parametrima dinamički faktor oblika J_2 ili spljoštenost elipsoida f :

U slučaju kada je zadana spljoštenost elipsoida f mala poluos elipsoida se izračuna s pomoću izraza

$$b = a - a \cdot f, \quad (1)$$

a dinamički faktor oblika dobivamo pomoću izraza

$$J_2 = \frac{e^2}{3} \left(1 - \frac{2}{15} \frac{me'}{q_0} \right). \quad (2)$$

U drugom slučaju kada je zadan dinamički faktor oblika J_2 , iterativnim postupkom izračunamo malu poluos elipsoida b . Da bi ju mogli izračunati prvo računamo pomoćnu veličinu

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}. \quad (3)$$

Kako je mala poluos elipsoida b na početku računanja u izrazu (3) nepoznata, za početnu vrijednost možemo uzet bilo koju vrijednost te iterativno provesti računanje. Nadalje u iterativnom postupku računamo kvadrat drugog ekscentriciteta elipsoida

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad (4)$$

a zatim i pomoćnu veličinu

$$2q_0 = \left(1 + \frac{3}{e'^2} \right) \arctan e' - \frac{3}{e'}. \quad (5)$$

Prvi ekscentricitet elipsoida dobijemo s pomoću

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (6)$$

a njega možemo povezati s osnovnim parametrima a , GM , J_2 i ω u jednadžbi koja ima oblik

$$e^2 = 3J_2 + \frac{4}{15} \frac{\omega^2 a^2}{GM} \frac{e^3}{2q_0}. \quad (7)$$

Vrijednost male poluosi elipsoida dobit ćemo s pomoću

$$b = a \sqrt{1 - e^2}. \quad (8)$$

Tu veličinu uvodimo u izraz (3) i ponavljamo iterativni postupak dok razlika zadnje dvije vrijednosti male poluosi elipsoida ne bude zanemariva.

Linearni ekscentricitet elipsoida računamo pomoću izraza

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (9)$$

a polarni radijus zakrivljenosti

$$c = \frac{a^2}{b}, \quad (10)$$

Za računanje duljine luka meridijana od ekvatora do pola koristimo izraz

$$Q = c \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{3}{4} e'^2 + \frac{45}{64} e'^4 - \frac{175}{256} e'^6 + \frac{11025}{16384} e'^8 \right). \quad (11)$$

Od geometrijskih parametara računani su i sljedeći radijusi:

a) radijus dobiven na osnovi aritmetičke sredine

$$R_1 = \frac{a + a + b}{3} = a \left(1 - \frac{f}{3} \right), \quad (12)$$

b) radijus zakrivljenosti sfere iste površine kao elipsoid

$$R_2 = c \left(1 - \frac{2}{3} e'^2 + \frac{26}{45} e'^4 - \frac{100}{189} e'^6 + \frac{7034}{14175} e'^8 \right), \quad (13)$$

c) radijus sfere istog volumena kao elipsoid

$$R_3 = \sqrt[3]{a^2 b}. \quad (14)$$

Fizikalne parametre počinjemo računati vrijednošću normalnog potencijala na plohi nivo-elipsoida s pomoću izraza

$$U_0 = \frac{GM}{E} \arctan e' + \frac{1}{3} \omega^2 a^2. \quad (15)$$

Zatim računamo pomoćne veličine koje ćemo upotrebljavati pri računanju normalnih vrijednosti ubrzanja sile teže:

$$q_0' = 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left(1 - \frac{1}{e'} \arctan e' \right) - 1 \quad (16)$$

i

$$m' = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}. \quad (17)$$

Normalnu vrijednost ubrzanja sile teže na ekvatoru dobivamo s pomoću

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left(1 - m' - \frac{m' e' q_0'}{6 q_0} \right), \quad (18)$$

a normalnu vrijednost ubrzanja sile teže na polu na temelju izraza

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m' e' q_0'}{3 q_0} \right). \quad (19)$$

Globalnu normalnu spljoštenost ubrzanja sile teže dobijemo prema

$$f^* = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}. \quad (20)$$

Normalna vrijednost ubrzanja sile teže za bilo koju točku na plohi nivo-elipsoida može se izračunati po dobro poznatoj Somiglianovoj formuli, vidi npr. Torge (1989), a pomoćna veličina za računanje je

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1. \quad (21)$$

Sferni harmonijski koeficijenti dobiju se prema izrazu

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(1 - n + 5n \frac{J_2}{e^2} \right). \quad (22)$$

3. Program PARAMET

Da bi se problem numeričke obrade sveo na korisnički nivo navedena računanja su obrađena u programu PARAMET. Program omogućava četiri mogućnosti zadavanja početnih parametara:

- 1 – a, J₂, GM, ω (GRS80)
- 2 – a, f, GM, ω (WGS84)
- 3 – a, J₂, GM, ω (ulazni parametri)
- 4 – a, f, GM, ω (ulazni parametri)

Prilikom odabira prvog izbora računaju se geometrijski i fizikalni parametri za GRS80 nivo-elipsoid, a pri drugom odabiru vrijednosti za World Geodetic System 1984 (WGS84). Treći izbor omogućuje korisniku unošenje četiriju osnovnih parametara a, J₂, GM i ω nivo-

elipsoida, a četvrti izbor omogućuje unos četiriju osnovnih parametra a , f , GM i ω .

4. Rezultati računanja programom

U Tablici 1 dani su izračunani parametri za GRS80 i WGS84 nivo-elipsoide te za Besselov elipsoid. Za Besselov elipsoid nisu određeni fizikalni parametri te su pri računanju korišteni, osim dvaju geometrijskih parametara za Besselov elipsoid (a , f), fizikalni parametri (GM , ω) za WGS84 nivo-elipsoid.

	GRS80	WGS84	Bessel
Četiri osnovna parametra			
a [m]	6378137,0	6378137,0	6377397,155
GM [m ³ /s ²]	0,3986005E+15	0,3986004418E+15	0,3986004418E+15
ω [rad/s]	0,7292115E-04	0,7292115E-04	0,7292115E-04
1/f	-	298,257223563	299,152812850
J₂	,00108263	-	-
Izračunani geometrijski parametri			
f	,0033528106812	,0033528106647	0,0033427731816
1/f	298,25722210	-	-
b [m]	6356752,3141	6356752,3142	6356078,9628
E [m]	521854,0097	521854,0084	521013,1390
c [m]	6399593,6259	6399593,6258	6398786,8481
e²	0,006694380023	0,006694379990	0,006674372231
e	0,081819191042	0,081819190843	0,081696831216
e'²	0,006739496775	0,006739496742	0,006719218798
e'	0,082094438152	0,082094437950	0,081970841145
J₂	-	0,00108262982126	0,00107634545902
Q [m]	10001965,7293	10001965,7294	10000855,7645
R₁ [m]	6371008,7714	6371008,7714	6370291,0909
R₂ [m]	6371007,1809	6371007,1810	6370289,5102
R₃ [m]	6371000,7900	6371000,7900	6370283,1582
Izračunani fizikalni parametri			
U₀ [m ² /s]	62636860,8500	62636851,7146	62643883,4720
m'	0,00344978600308	0,00344978650684	0,00344862088261
γ_e [m/s ²]	9,7803267715	9,7803253359	9,7825135428
γ_p [m/s ²]	9,8321863685	9,8321849379	9,8344545940
f*	0,005302440112	0,005302441399	0,005309581323
k	0,001931851353	0,001931852653	0,001949059415
J₄	-0,00000237091222	-0,00000237091120	-0,00000233931924
J₆	0,00000000608347	0,00000000608346	0,00000000593208
J₈	-0,0000000001427	-0,0000000001427	-0,0000000001355

Tablica 1: Izračunani parametri nivo-elipsoida

5. Zaključak

Nivo-elipsoid osnovno je matematičko fizikalno tijelo u geodeziji te je potrebno poznavati

njegove parametre. Nivo-elipsoid zadaje se s pomoću četiriju osnovnih parametara na osnovi kojih se izvide preostali matematički i fizikalni parametri.

Literatura

Heiskanen, W. A., Moritz, H. (1967): Physical geodesy, W. H. Freeman, San Francisco.
Moritz, H. (1984): Geodetic Reference System 1980. U: C. C. Tscherning (ed.): The geodesist's handbook 1984, Bull. Geod, 58, 388-398, 1984.
Torge, W. (1989): Gravimetry, Walter de Gruyter.

Computing of level ellipsoid parameters

ABSTRACT: Level ellipsoid is a fundamental mathematical and physical body that is used in geodesy. It is determined with four fundamental parameters. Using them other mathematical and physical parameters are computed. Examples calculations for GRS80 and WGS84 level ellipsoids and Bessel ellipsoid are made.

Key words: level ellipsoid, fundamental parameters, major semi axis, ellipsoid flattening, dynamical form factor, geocentric gravitational constant, speed of rotation.